木星对地球轨道偏心率的周期性影响探究

PB24000347 费维瀚少年班学院

2024 年 12 月 11 日

目录

摘要

在大学的物理课堂上，介绍天体运动部分大都是以地月或者是太阳地球为研究对象，但是太阳系并不是一个孤立的体系，他还包括八大行星，其余的行星都会对地球有作用力，从而会对于地球轨道产生一定的扰动，不满足经典的椭圆稳定轨道，本文以木星为例，详细阐释木星通过引力作用对地球轨道偏心率的机制，结合数值模拟方法，实际观测分析手段，对考古学中米兰科维奇循环即“40.5 万年周期”现象进行解释与延申。

1 基本假设

我们已知太阳质量 $M_s = 1.989 \times 10^{30} kg$, 地球的轨道半长轴是 $R_e = 1.496 \times 10^{11} m$, 即为一个天文单位，轨道离心率是 $e_e = 0.0167$ 木星的轨道半径是 $R_j = 7.79 \times 10^{11} m$, 大约为 5.204 个天文单位，轨道离心率为 $e_j = 0.048$, 由于地球与木星都是在离心率很小，两者之间的引力势能相比于各自于太阳之间的引力势能是周期性变化，而这里研究周期是以年来计算，因此每年之间的引力势能的变化量是无穷小量，因此假设木星与地球各自是能量守恒的，同时 e_e,e_j 也各自是无穷小量，可以把木星和地球各自看成是以恒定的角速度运动。

2 引力势能

首先我们来推导离心率变化量 Δe 与物体的角动量变化量 ΔL 的关系

对于一个质量为 m 的物体绕 M 的物体在一个偏心率 e 非常小的轨道上运动，满足能量守恒，角动量不守恒

$$e=\sqrt{1+\frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}} \tag{1}$$

$$\text{即为}e^2-1=\frac{2EL^2}{G^2M^2m^3} \tag{2}$$

$$\text{左右取微分，由于 e 与 L 的变化量都是小量，因此可以近似为}\Delta f=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\Delta t \tag{3}$$

$$\text{于是有}2e\Delta e=\frac{2E\cdot 2L\Delta L}{G^2M^2m^3}$$

$$\text{即为}\Delta e=\frac{2EL\Delta L}{G^2M^2m^3e} \tag{4}$$

由于$E=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r}=-\frac{GMm}{2a}$是物体的能量, 其中 a 是半长轴, 而且由于 e 很小, 近似看成圆周

$$\text{运动，从而由于万有引力提供向心力}m\frac{v^2}{r}=\frac{GMm}{r^2}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{GMm}{a}}$$

$$\text{由于}\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}\text{, 于是有}\Delta e=\frac{2(-\frac{GMm}{2a})\cdot m\sqrt{GMa}\Delta L}{G^2M^2m^3e}=-\frac{\Delta L}{m\sqrt{GMa}} \tag{5}$$

然后我们来推导以太阳为焦点建成的极坐标系下的极径与时间 t 的关系

$$\text{由于 e 是小量, 物体的运动可以近似看成是圆周运动，于是有}\theta\approx\omega t$$

$$\text{从而由于极坐标公式}r=\frac{p}{1+e\cos\theta}=\frac{p}{1+e\cos\omega t}\text{, 而且由于 e 很小从而有}r\approx p\cdot(1-e\cos\omega t)$$

$$\text{由几何关系可知}p=\frac{b^2}{a}=\frac{a^2-c^2}{a}=(1-e^2)a\text{得出}r=a(1-e^2)(1-\cos\cos\omega t)$$

$$\text{忽略高阶小量，}r=(1-e\cos\omega t)a \tag{6}$$

我们记 $\Delta\theta=\theta_e-\theta_j$, 于是有

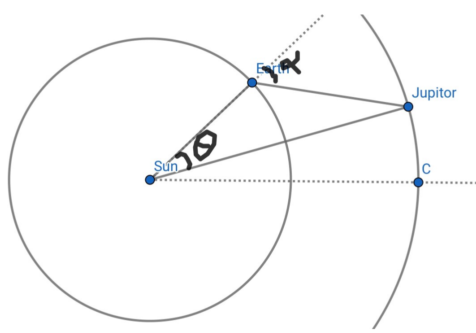

图 1: : 相关量示意图

$$\text{木星对地球的引力}\vec{F_{je}}=\frac{Gm_em_j}{r_{je}^2}\text{,由余弦定理} \tag{7}$$

$$\text{在}\Delta OAB\text{中有}r_{je}^2=r_e^2+r_j^2-2r_er_j\cos\Delta\theta \tag{8}$$

$$\text{从而由角动量定理}\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{M}\to$$

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\vec{F},\text{ 而这一题中对于}|\vec{r}|=r_e, \tag{9}$$

$$\text{而}F_{je}\text{已经求出，而对于}\vec{F}\text{和}\vec{r}\text{的夹角}\alpha\text{满足} \tag{10}$$

$$\sin\alpha=\frac{h}{r_{je}}=\frac{r_j\sin\Delta\theta}{r_{je}}\text{即为}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=-\frac{Gm_jm_e}{\sqrt{(r_j^2+r_e^2-2r_jr_e\cos\Delta\theta)^2}}\cdot\frac{r_er_j\sin\Delta\theta}{r_{je}} \tag{11}$$

$$=-\frac{Gm_jm_er_er_j\sin\Delta\theta}{\sqrt{(r_j^2+r_e^2-2r_jr_e\cos\Delta\theta)^3}} \tag{12}$$

$$\text{由于 e 是小量，有上述讨论中，}r_e=(1-e_e\cos\omega_et)a_e,r_j=(1-e_j\cos\omega_jt)a_j \tag{13}$$

$$\text{同时有}r_e^2\approx1-2e_e\cos\omega_et,r_j^2\approx1-2e_j\cos\omega_jt,\text{带入后有} \tag{14}$$

$$\text{令}\eta=\frac{m_j}{m_e}=5.204,\text{ 则}$$

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=-\frac{Gm_em_ja_ea_j}{a_e^3}\cdot$$

$$\frac{(1-e_e\cos\omega_et-e_j\cos\omega_jt)\sin\Delta\theta}{\sqrt{(\eta^2(1-2e_j\cos\omega_jt)+(1-2e_e\cos\omega_et)-2\eta(1-e_e\cos\omega_et-e_j\cos\omega_jt)\cdot\cos\Delta\theta)^3}} \tag{15}$$

$$\text{记后面的一串式子为 f(t), 则}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=-\frac{Gm_em_ja_ea_j}{a_e^3}\cdot f(t) \tag{16}$$

$$\text{因此令}k=\frac{\omega_e}{\omega_j}=11.86,\text{令}o=\omega_jt,\text{从而有}\omega_et=ko,\Delta\theta=(k-1)o$$

$$\text{于是}\int_0^T f(t)dt=\frac{1}{k-1}\cdot \tag{17}$$

$$\int_0^M\frac{(1-e_e\cos ko-e_j\cos o)\sin(k-1)o}{\sqrt{(\eta^2(1-2e_j\cos o)+(1-2e_e\cos ko)-2\eta(1-e_e\cos ko-e_j\cos o)\cdot\cos(k-1)o)^3}}do \tag{18}$$

$$\text{从而}\Delta L=-\frac{Gm_em_ja_ea_j}{a_e^3}\int_0^T f(t)dt \tag{19}$$

于是我们有了 ΔL 的表达式，将其带回到 Δe_e 中去, 要求出 e 变化的周期即为 $\Delta e_e=0$, 同时要满足是以年为单位 (否则无法保证对于 E 的周期性)。同时要求出 Δe_e 的最大值从而可以求出离心率的变化范围，同时由于变化幅度不大，在积分的过程中将 e_e,e_j 视为恒定的值，于是由 c 语言控制以 593 年为一个周期 (此时木星与地球的初相位都回到了原本的位置)(代码见后)，经过计算发现，对于 w 的最大值与最小值之间的差为 0.02，带入 Δe_e 中有地球的离心率变化范围是 0.0167±0.0226, 即为 0 到 0.0393 之间，而对于 e 的变化周期，得出时间为 $M\times11.86\ \approx25.5$

有文献指出木星会导致地球的偏心率以 $T\ =40.5\ $ 的周期变化，而以本题理论计算得到的数据 $T\ $ 相比差为 $\eta=1-\frac{T}{T}=0.36$ ，而对于变化范围则也为 $\eta_2=1-\frac{0.0393}{0.0607}=0.36$。

3 数据分析

由于理论计算和实际的结果都是同一量级的，说明我们的总体模型没有错误，木星对于地球的离心率主要是在角动量上面影响，但是由于还有 0.35 左右的误差。

第一点可能是在 $\Delta e=\frac{2EL\Delta L}{G^2M^2m^3e}$ 从 0 到 T 时刻积分的之间 E 不能看成常量，即为 $\Delta e=\frac{2EL\Delta L+L^2\Delta E}{G^2M^2m^3e}$ 中，$E=-\frac{GM_sm_e}{2a_e}+\frac{Gm_jm_e}{2r_{je}}$ 虽然后一项是小量，但是木星会使得地球的半长轴变长，从而会使得 ΔE 不可忽略，对于 Δe_e 产生影响。

第二点可能是对于近似过程中，虽然 e_e, e_j 都是小量，但是在对于将木星与地球的极角 $\theta = \omega t$ 时会产生误差，同时对于 $r = a(1 - e\cos\theta)$ 这一步泰勒展开时也会产生误差，因此这也会对于 ΔE 产生影响。

第三点是木星与地球不在同一黄道面上，两者轨道之间会有一定的影响，从而对于地球的角动量的变化量上的计算上会产生一定的误差，还有就是对于积分计算的时候由于无法求出原函数只可以求数值解而对于 dx 取值不够小导致的误差。

综上所述，本文用经典力学的方法，结合计算机技术初步探究了木星对地球轨道偏心率的周期性影响，未来希望可以提高计算精度，考虑更多因素进一步完善太阳系形成和演化的理论模型以对地球气候等方面提供参考。

前文代码如下

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>
using namespace std;
double func(double x)
{
    double fenzi=(1-0.0167*cos(11.86*x)-0.048*cos(x))*sin(10.86*x)
        ;
    double fenmu=5.204*5.205*(1-2*0.048*cos(x))+1*1*(1-2*0.0167*
        cos(11.86*x))-2*5.204*(1-0.048*cos(x)-0.0167*cos(11.86*x))
        *cos(10.86*x);
    fenmu=sqrt(fenmu);
    fenzi=fenzi/(fenmu*fenmu*fenmu);
    return fenzi;
}
double calc(double min,double max)
{
    double t=0.0001;
    double sum=0;
    for(double i=min;i<max;i+=t)
    {
            double nowy=func(i)*t;
            sum+=nowy;
    }
    return sum;
}
int main()
{
    float o=0;
    double sums=0;
    double z=-1;
    while(1)
```

```
        {
                sums+=calc(o,o+1);
                double q=sums;
                o=o+1;
                if(q<0) q*=-1;
                if(z<q) z=q;
                    if(q<(1/(10000000.0)))
                {
                        printf("years:%f\n",o);
                        printf("maximum:%f\n",z);
                        return 0;
                }
            }
        return 0;
    }
```

结果

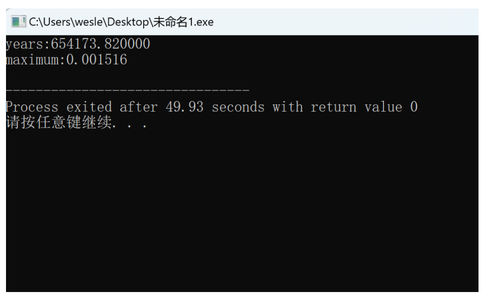

图 2: : 程序结果示意

4 参考文献

[1] 田军, 吴怀春, 黄春菊, 等. 从 40 万年长偏心率周期看米兰科维奇理论 [J]. 地球科学, 2022, 47(10):26.DOI:10.3799/dqkx.2022.248.

[2] 刘复刚, 王建, 张富, 等. 地球轨道偏心率 40 万年和 10 万年周期的行星驱动 [J]. 地球物理学进展, 2014(1):9.DOI:10.6038/pg20140104.